Traitement du bruit par minimisation quadratique

TS2
tristan.moreau@univ-rennes1.fr

Laboratoire de Traitement du Signal et des Images (LTSI)
Université de Rennes 1.

Vendredi 14 février

Plan : Introduction

1 Introduction

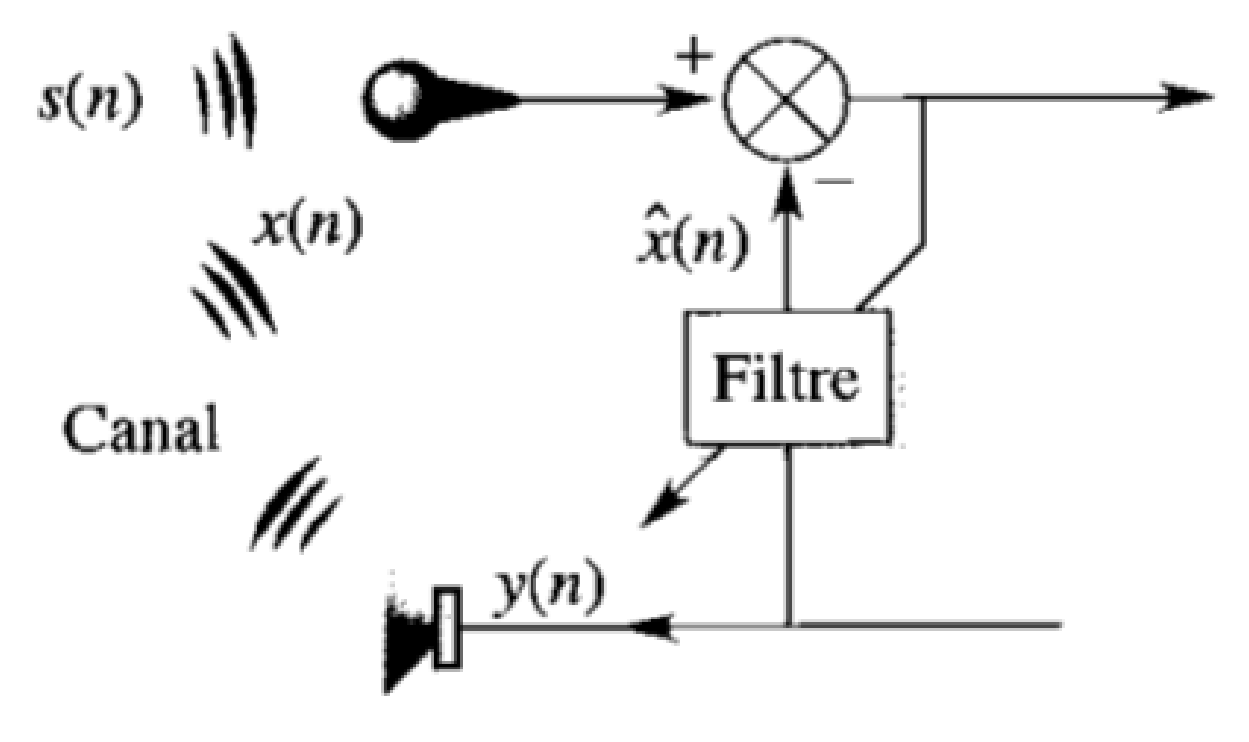
Notations du cours

Notations

- Moyenne de X : $m_X(t) = \mathbb{E}(X(t))$.
- Covariance de X :
  $\gamma_x(t_1, t_2) = \mathbb{E}\{X(t_1)X^*(t_2)\} - m_X(t_1)m_X^*(t_2)$.
- Corrélation de X stationnaire au sens large (SSL) :
  $\gamma(\tau) = \mathbb{E}\{X(t)X^*(t-\tau)\} - |m|^2$.
- Densité spectrale de puissance de X notée $\Gamma(\nu)$ est la tranformée de Fourier de la fonction de corrélation $\gamma(\tau)$.

Bruit : illustrations

Téléphone main libre



Bruit : illustrations

Image originale non bruitée

Bruit : illustrations

Image bruitée

Bruit : illustrations

Image débruitée par filtre de Wiener : à faire en TP !

Bruit

Définition intuitive

Au sens le plus large, tout signal indésirable par rapport à un autre signal dit utile est appelé bruit.

Deux classes de bruits

- Ceux provenant des perturbations imprévisibles donc aléatoires.
- Ceux dus à des interférences provoquées par le captage accidentel d'autres signaux utiles (couplage entre des lignes de transmissions voisines).

Vue d'ensemble

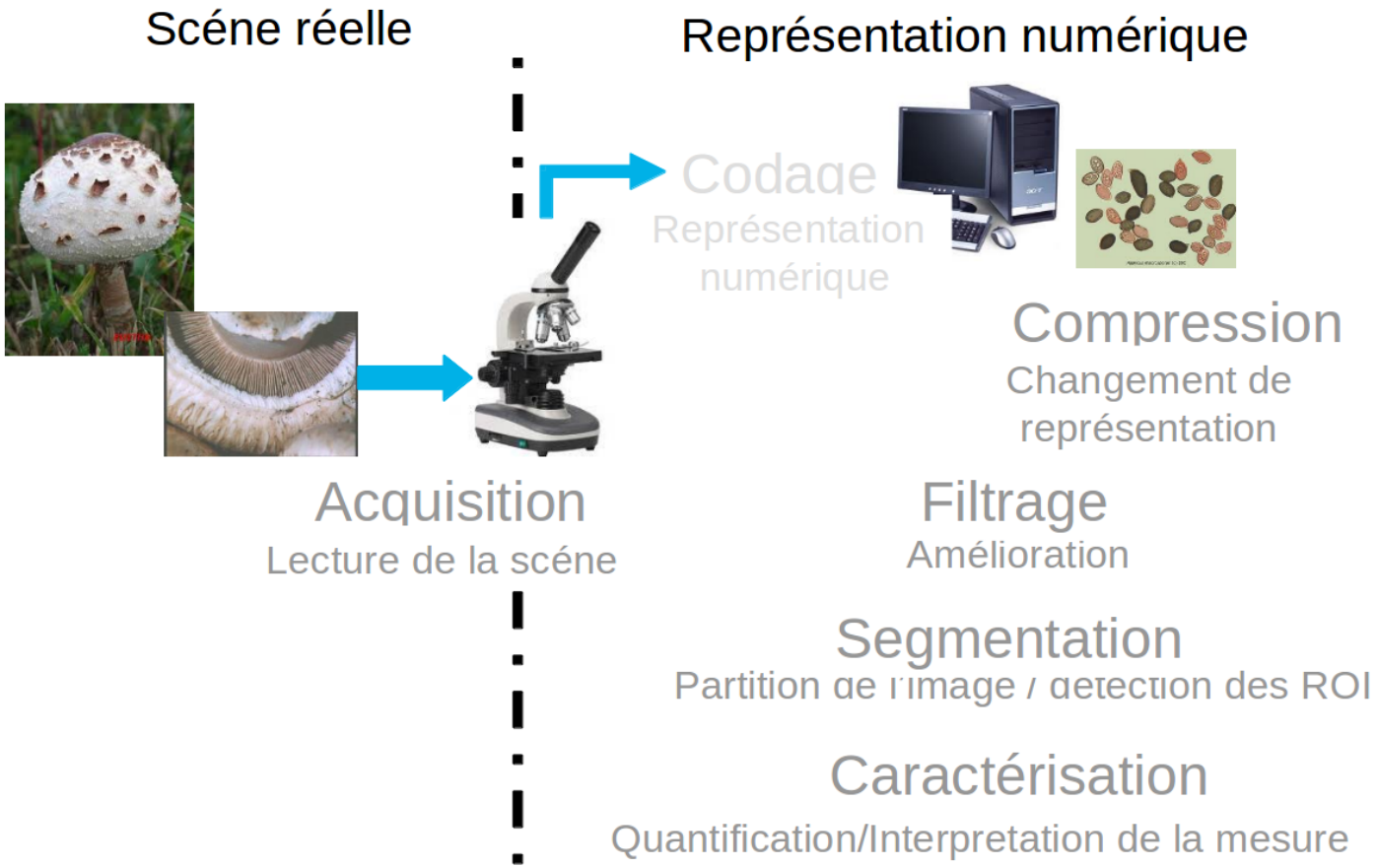


FIGURE: Prétraitements des données : réduire l'influence du bruit.

Plan global

1. Introduction
2. Typologie des bruits et illustrations
3. Retour sur le théorème de projection
4. Méthode des moindres carrés
5. Filtre de Wiener : une première approche

Plan : Typologie des bruits et illustrations

2. Typologie des bruits et illustrations
   - Définition du bruit
   - Bruit blanc théorique
   - Bruits de fond dans un circuit électrique : bruits blancs

Bruit

Définition

Au sens le plus large, tout signal indésirable par rapport à un autre signal dit utile est appelé bruit.

Bruit : modélisation mathématique

Définition du bruit blanc

Un signal aléatoire à temps continu est appelé bruit blanc au sens large s'il est stationnaire au sens large et si sa fonction de corrélation est une distribution de Dirac : $\gamma_x(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$. σ^2 est la variance du bruit.

Bruits de fonds dans les circuits électriques

Les sources de bruits

- Les sources extérieures à un système de traitement : agissent par influence et peuvent être naturelles ou artificielles. Principale méthode : filtrage adaptatif.
- Les bruits internes au système. Utiliser des blindages réduire les bruits dus aux commutations, aux couplages...

Bruits de fonds dans les circuits électriques

Dans les circuits électriques

- Perturbations de type impulsionnel engendrées par des commutations de courants (interrupteurs éléctroniques, circuits logiques...).
- Bruits de fond générés dans les câbles et les composants électroniques (mouvement Brownien : déplacement érratique de particules chargées en équilibre thermodynamique). Trois principaux types de bruit :
  - Bruit thermique (Johnson noise).
  - Bruit de grenaille (shot noise).
  - Bruit additionnel de basse fréquence.

Bruits de fonds dans les circuits électriques

Bruit thermique (Johnson noise)

Le bruit thermique est un signal aléatoire qui est présent dans tout composant passif ou actif opposant une certaine resistance électrique R au passage d'un courant.
Modélisation par un signal stationnaire ergodique du second ordre, centré et de spectre constant. Le bruit thermique constitue l'exemple le plus important du bruit blanc.

Bruits de fonds dans les circuits électriques

Bruit de grenaille (shot noise)

Les fluctuations statistiques du nombre de porteurs de charges (électrons ou trou) qui participent à la création d'un courant en traversant une barrière de potentiel. Une telle barrière existe à chaque jonction PN d'un dispositif à semiconducteur. Elle intervient dans les mécanismes d'émission thermoélectrique et photoélectrique.

Bruits de fonds dans les circuits électriques

Bruit additionnel de basse fréquence

Aux fréquences supérieures à quelques kHz pour les composants électriques, ou quelques dizaines de kHz pour les composants électroniques, le bruit de fond de ces composants est essentiellement un bruit blanc qui résulte essentiellement de l'effet thermique et de l'effet de grenaille.
Aux fréquences inférieures, on observe que la densité spectrale de puissance décroit en fonction de la fréquence. On constate que cette densité varie approximativement comme l'inverse de la fréquence.

Plan : Retour sur le théorème de projection

3 Retour sur le théorème de projection
- Espaces de Hilbert
- Théorème de projection

Espace de Hilbert

Définition

Soit H un espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ entre deux éléments $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ quelconques.

- On appelle norme de $\mathbf{x}$ de H le nombre positif défini par $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$.
- On dit que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont orthogonaux, et on note $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.
- On appelle distance entre deux éléments $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de H le nombre positif défini par $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}$.

Espace de Hilbert

Cas déterministe

L'espace des suites complexes de carré sommable (ie. $\sum_k |x_k|^2 < \infty$) muni du produit scalaire : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_k x_k y_k^*$ est un espace de Hilbert.

Espace de Hilbert

Cas aléatoire

L'espace des variables aléatoires centrés, définies sur le même espace de probabilité, et de carré sommable (ie. $\mathbb{E}\{|x^2|\} < \infty$) est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \mathbb{E}\{xy^*\}$

Théorème de projection

Théorème de projection

Etant donné H un espace de Hilbert, C un sous-espace de H et $\mathbf{y}$ un élément quelconque de H, alors :

- Il existe un unique élément $\mathbf{s_0} \in C$ tel que : $\forall \mathbf{s} \in C, ||\mathbf{y} - \mathbf{s_0}||^2 \leq ||\mathbf{y} - \mathbf{s}||^2$.
- Cet élément vérifie $\forall \mathbf{s} \in C, \mathbf{y} - \mathbf{s_0} \perp \mathbf{s}$.
- L'écart minimal a pour expression $\langle \mathbf{y} - \mathbf{s_0}, \mathbf{y} \rangle$.

Théorème de projection

Cas déterministe

- Soit H l'espace $\mathbb{C}^N$ des vecteurs à composantes complexes de dimension N muni du produit scalaire $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k^*$.
- C sev engendré par P vecteurs $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$,..., $\mathbf{x}^P$ de H.
- $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^P]$ de dim NxP.
- Un vecteur quelconque de C peut s'écrire $\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{P} h_k \mathbf{x}^k = \mathbf{Xh}$ où $\mathbf{h}$ est un vecteur à P composantes complexes.

Théorème de projection

Cas déterministe

- Soit y un autre vecteur de H.
- L'élément $\mathbf{s_0} \in C$ le plus proche de $\mathbf{y}$ est tel que $\mathbf{y} - \mathbf{s_0}$ est orthogonal aux P colonnes de $\mathbf{X}$.
- $\mathbf{X}^H(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{h}) = 0$ donc $\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{h} = \mathbf{X}^H\mathbf{y}$.

Détermination de s_0

- Connaissant $\mathbf{y}$ et $\mathbf{X}$ on déduit le vecteur $\mathbf{h}$ des coefficients qui détermine le vecteur $\mathbf{s_0}$ cherché.
- Si $\mathbf{X}^H\mathbf{X}$ est inversible alors $\mathbf{s_0} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^H\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^H\mathbf{y}$.

Théorème de projection

Cas aléatoire

- H est l'espace des variable aléatoires centrées, définies sur le même espace de probabilité et de carré intégrable, muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \mathbb{E}\{xy^*\}$ et $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbb{E}\{|x|^2\}}$.
- C sev engendré par P VA x_1,..., x_P de H avec $P < N$.
- Une VA s quelconque de C peut s'écrire $s = \sum_{k=1}^{P} h_k x_k$.

Théorème de projection

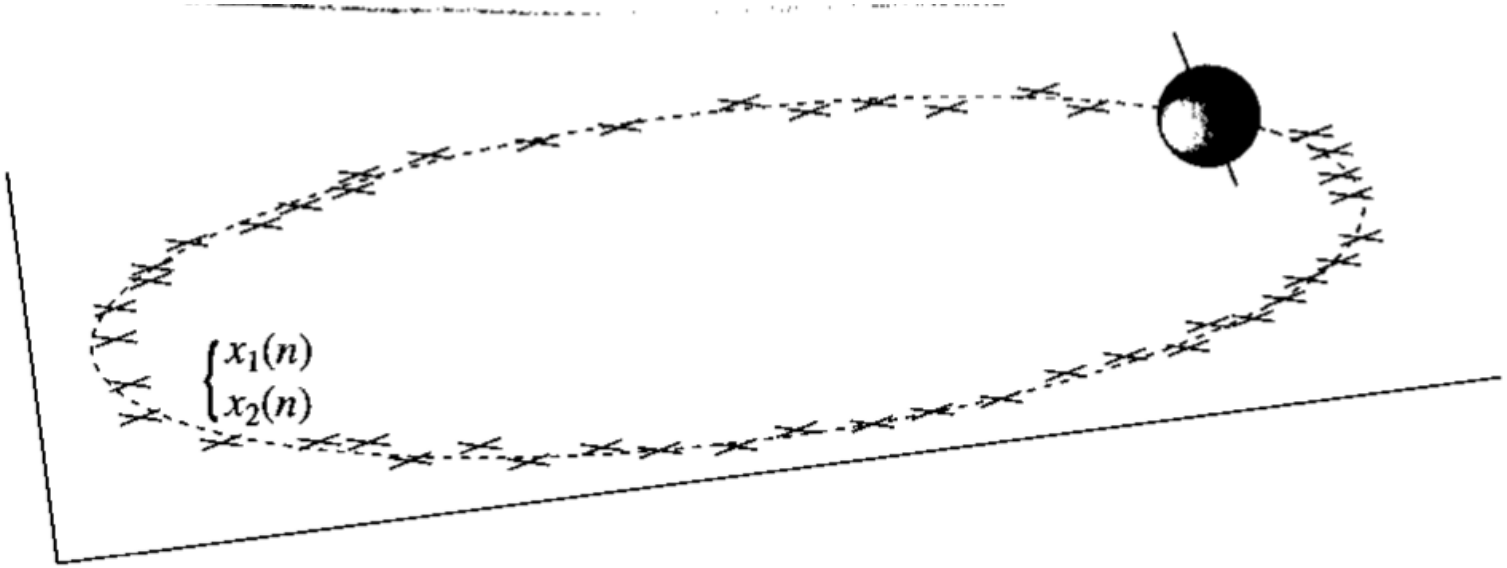
Cas aléatoire

- Soit y une autre VA de H.
- L'élément $s_0 \in C$ le plus proche de y est tel que $y - y_0$ est orthogonal aux P variables aléatoires qui engendrent C.
- On cherche $s_0 \in C$ tel que $y - s_0$ est orthogonal aux P VA qui engendrent C.
  $\forall n \in 1, ..., N \ \mathbb{E}\{(y - s_0)x_n^*\} = 0.$

Plan : Méthode des moindres carrés

4 Méthode des moindres carrés
- Etude de la course des planètes
- Formulation du problème
- Modèle linéaire
- Etimateur des moindres carrés
- Algorithme récursif des moindres carrés

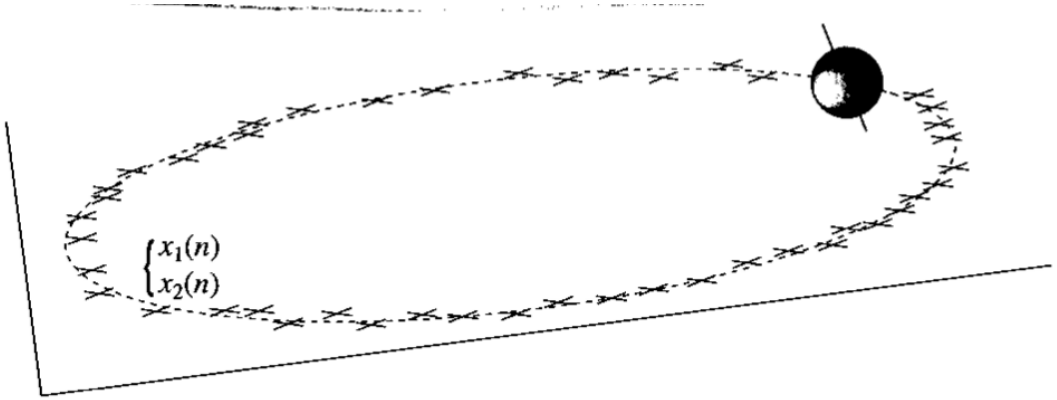
Etude de la course des planètes



1

1. Gauss a calculé l'orbite de l'astéroide Cérès à partir de son observation en 1801 pendant 41 jours...en utilisant la méthode des moindres carrés.

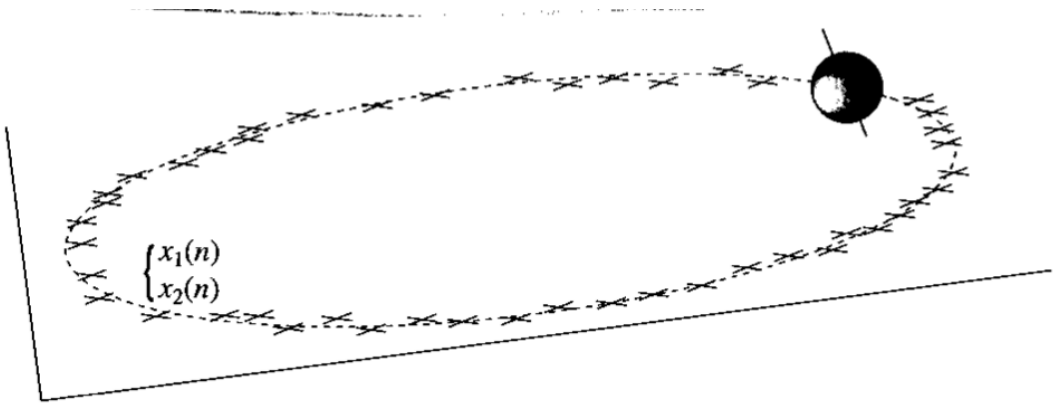
Etude de la course des planètes



Problème

- A partir de N positions $(x_1(n), x_2(n))$ d'une planète, le problème est d'estimer les cinq paramètres qui caractérisent l'équation générale d'une ellipse :
  $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + 1 = 0.$

Etude de la course des planètes



1 solution

- L'idée de Gauss fut de choisir les valeurs des paramètres qui caractèrisent une sorte d'ellipse "moyenne".
- Choisir a, b, c, d, e qui minimisent $\sum_{n=1}^{N}(ax_1^2(n) + bx_2^2(n) + cx_1(n)x_2(n) + dx_1(n) + ex_2(n) + 1)$.

Méthode des moindres carrés

Formulation du problème

$y(n) = s(n; \mathbf{h}) + w(n)$ où $w(n)$ reprèsente soit le bruit de mesure, soit le bruit de modèle.

Le principe

Partant de N observations, la méthode des moindres carrés consiste à prendre comme valeur de $\mathbf{h}$ celle qui minimise la quantité $\sum_{n=1}^{N} |y(n) - s(n, \mathbf{h})|^2$.

Méthode des moindres carrés : cas d'un modèle linéaire

Hypothèse d'un modèle linéaire

- $s(n;\mathbf{h})$ s'exprime linéairement en fonction du paramètre inconnu $\mathbf{h} = [h(0), ..., h(P-1)]^T$:
  $s(n;\mathbf{h}) = x_{n,1}h(0) + ... + x_{n,P}h(P-1)$.
- Les quantités $x_{n,j}$ s'appellent "régresseurs".
- L'observation $y(n)$ s'écrit $y(n) = s(n;\mathbf{h}) + w(n)$ où $w(n)$ est un bruit.

Méthode des moindres carrés : cas d'un modèle linéaire

Hypothèse d'un modèle linéaire

- En empilant N observations successives, on obtient :
$$\begin{pmatrix} y(1) \\ \dots \\ y(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,P} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{N,1} & \dots & x_{N,P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ \dots \\ h(P-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w(1) \\ \dots \\ w(N) \end{pmatrix}.$$
- Avec des notations matricielles : $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{w}$ où $\mathbf{X}$ est une matrice de dimension N x P.

Estimateur des moindres carrés

Cas simple : supposons qu'il n'y ait pas de bruit...

- $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h}$ où $\mathbf{y}$ est un vecteur de dimensions N.
- Il suffit que $N = P$ pour estimer $\mathbf{h}$: $\mathbf{h} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$.
- En l'absence de bruit, l'observation de P valeurs du signal suffit à estimer $\mathbf{h}$ sans erreur.

Estimateur des moindres carrés

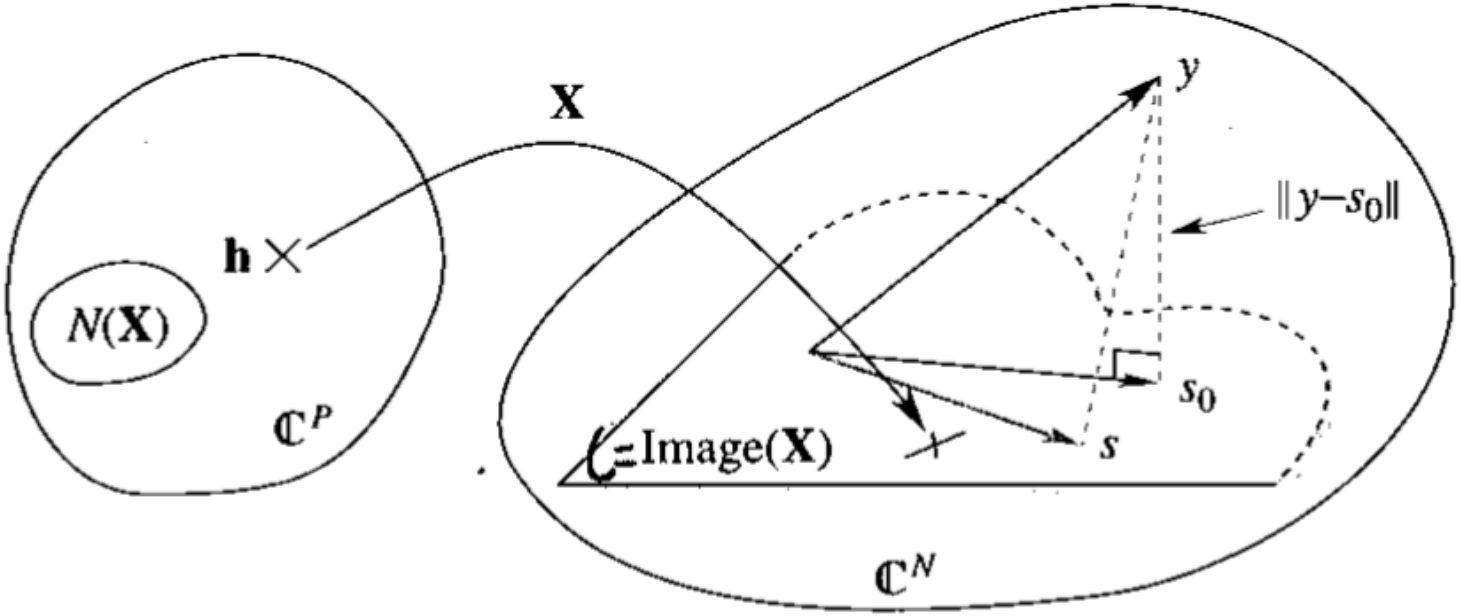
En présence de bruit

- Il n'existe pas un vecteur $\mathbf{h}$ qui vérifie simultanément les N équations $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h}$...
- Au mieux on chercher $\mathbf{h}$ qui minimise la norme de l'écart $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{h})^H(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{h})$. C'est *l'éstimateur des moindres carrés*.

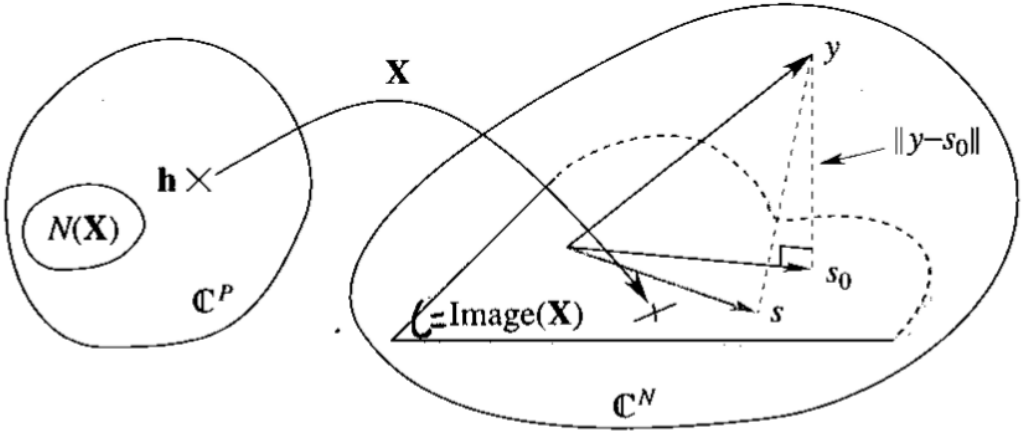
Pourquoi prendre $N > P$?

Si le bruit est blanc, l'estimateur des moindres carrés est, parmi tous les estimateurs linéaires sans biais, celui qui est de variance minimale. Cette variance est d'autant plus faible que N est grand.

Estimateur des moindres carrés



Estimateur des moindres carrés



Théorème de projection

- Soit H l'espace des vecteurs de dimension N.
- $C = Image(\mathbf{X})$. Un vecteur $\mathbf{s}$ de C s'écrit $\mathbf{Xh}$.
- $\mathbf{y} - \mathbf{Xh}$ est orthogonal à toutes les colonnes de $\mathbf{X}$.
- $\mathbf{X}^H(\mathbf{y} - \mathbf{Xh}) = 0$. Donc $\mathbf{X}^H\mathbf{Xh} = \mathbf{X}^H\mathbf{y}$.

Estimateur des moindres carrés

Si $\mathbf{X}$ est de rang P

- La matrice $\mathbf{X}^H\mathbf{X}$ est de dimension $P \times P$ et est inversible.
- $\mathbf{h} = (\mathbf{X}^H\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^H\mathbf{y}$.

Si $\mathbf{X}$ est de rang $R < P$

- Le vecteur $\mathbf{h}$ n'est pas unique.
- En effet si $\mathbf{u} \in N(\mathbf{X})$ alors $\mathbf{X}^H\mathbf{X}(\mathbf{h}+\mathbf{u}) = \mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{h} + 0 = \mathbf{X}^H\mathbf{y}$ et donc $\mathbf{g} = \mathbf{h} + \mathbf{u}$ vérifie aussi l'équation $\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{g} = \mathbf{X}^H\mathbf{y}$.
- Toutes ces solutions sont équivalentes en terme d'écart quadratique.
- Parmi ces solutions, une seule est de norme minimale. C'est le vecteur orthogonal au noyau de $\mathbf{X}$.

Estimateur des moindres carrés

Bilan

- Il existe toujours au moins une solution à l'équation $\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{h} = \mathbf{X}^H\mathbf{y}$.
- Cette solution s'appelle `estimateur des moindres carrés` et nous la notons $\mathbf{h} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$.
- $\mathbf{X}^{\#}$ s'appelle `la pseudo-inverse` de X.

Estimateur des moindres carrés

Matlab...

- `h=pinv(X)*y` où `pinv` donne, parmi toutes les solutions celle de norme minimale.
- `h=X\y` où \donne la solution qui au plus R composantes non nulles.
- Ces deux solutions produisent le même écart quadratique et, sans autre contrainte, aucune n'est meilleure que l'autre.

Algorithme récursif des moindres carrés

A quoi ça sert ?

- $\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{h} = \mathbf{X}^H\mathbf{y}$.
- Le calcul de $\mathbf{h}$ nécessite la manipulation d'une matrice $\mathbf{X}$ de dimension $N \times P$.
- Suposons que l'on ait un flux de données continu et que l'on veut effectuer le calcul en *temps réel*.
  Le fait que $\mathbf{X}$ croit de façon illimité rend impossible le calcul direct...

Algorithme récursif des moindres carrés

- Ne nécessite pas d'inversion matricielle.
- Mise à jour récursive de la valeur de $\mathbf{h}$.

Algorithme récursif des moindres carrés

Algorithme récursif des moindres carrés

- La solution à l'étape n : $\mathbf{h}_n = \mathbf{Q}_n \mathbf{X}_n^H \mathbf{y}_n$ avec $\mathbf{Q}_n = (\mathbf{X}_n^H \mathbf{X}_n)^{-1}$.
- Notons $\mathbf{x}_{n+1}^H$ la n+1 ligne de données. On a $\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n \\ \mathbf{x}_{n+1}^H \end{pmatrix}$.
- Par conséquent
$$\mathbf{X}_{n+1}^H \mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^H & \mathbf{x}_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n \\ \mathbf{x}_{n+1}^H \end{pmatrix} = \mathbf{X}_n^H \mathbf{X}_n + \mathbf{x}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^H.$$
- D'où $\mathbf{Q}_{n+1} = (\mathbf{Q}_n^{-1} + \mathbf{x}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^H)^{-1}$.

Algorithme récursif des moindres carrés

Algorithme récursif des moindres carrés

- Propriété : $(\mathbf{R}+\mathbf{u}\mathbf{u}^H)^{-1} = \mathbf{R}^{-1} - \frac{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}^H\mathbf{R}^{-1}}{1+\mathbf{u}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}}$.
- Par conséquent $\mathbf{Q}_{n+1} = \mathbf{Q}_n - \frac{\mathbf{Q}_n\mathbf{x}_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}^H\mathbf{Q}_n}{1+\mathbf{x}_{n+1}^H\mathbf{Q}_n\mathbf{x}_{n+1}}$.

Algorithme récursif des moindres carrés

- Rappel $\mathbf{h}_n = \mathbf{Q}_n\mathbf{X}_n^H\mathbf{y}_n$.
- $\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{Q}_{n+1}\mathbf{X}_{n+1}^H\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{Q}_{n+1}\begin{pmatrix}\mathbf{X}_n^H & \mathbf{x}_{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{y}_n\\ \mathbf{y}_{n+1}\end{pmatrix}$.
- $\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{Q}_{n+1}(\mathbf{X}_n^H\mathbf{y}_n + \mathbf{x}_{n+1}\mathbf{y}_{n+1})$.
- $\mathbf{h}_{n+1} = (\mathbf{Q}_n - \frac{\mathbf{Q}_n\mathbf{x}_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}^H\mathbf{Q}_n}{1+\mathbf{x}_{n+1}^H\mathbf{Q}_n\mathbf{x}_{n+1}})(\mathbf{X}_n^H\mathbf{y}_n + \mathbf{x}_{n+1}\mathbf{y}_{n+1})$.

Algorithme récursif des moindres carrés

Algorithme récursif des moindres carrés

- $\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n + \frac{\mathbf{Q}_n \mathbf{x}_{n+1}}{1+\mathbf{x}_{n+1}^H \mathbf{Q}_n \mathbf{x}_{n+1}} (y_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}^H \mathbf{h}_n)$.
- Le terme $y_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}\mathbf{h}_n$: écart entre la valeur observée y_{n+1} et la valeur que l'on aurait du observer si la valeur h_n était exacte.

Algorithme récursif des moindres carrés

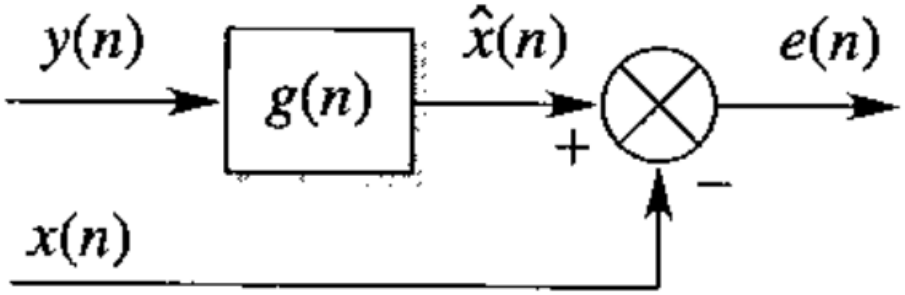
Bilan

- Initialisation $Q_0 = Id_P/\delta$ avec $\delta << 1$ et $\mathbf{h}_0 = 0$.
- for n=1 :end
  1. $\mathbf{K}_n = \frac{\mathbf{Q}_n \mathbf{x}_{n+1}}{1+\mathbf{x}_{n+1}^H \mathbf{Q}_n \mathbf{x}_{n+1}}$.
  2. $\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n + \mathbf{K}_n(y_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}^H \mathbf{h_n})$.
  3. $\mathbf{Q}_{n+1} = \mathbf{Q}_n - \frac{\mathbf{Q}_n \mathbf{x}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^H \mathbf{Q}_n}{1+\mathbf{x}_{n+1}^H \mathbf{Q}_n \mathbf{x}_{n+1}}$.

Plan : Filtre de Wiener : une première approche

5 Filtre de Wiener : une première approche
- Formulation du problème
- Une solution : théorème de projection
- Solution sans contrainte sur C
- Introduction de contraintes temporelles

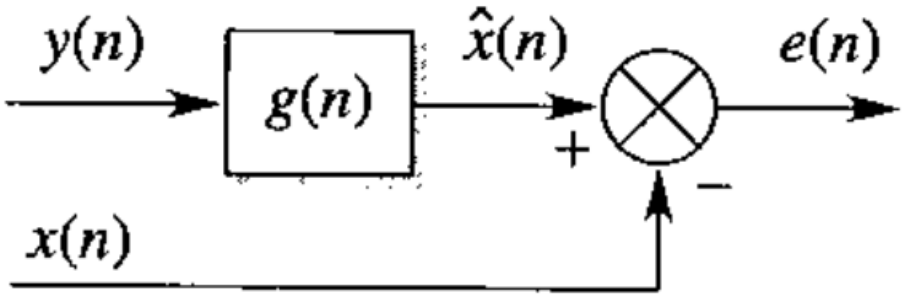
Filtre de Wiener : une première approche



Formulation du problème

- $y(n)$: une observation.
- $x(n)$: un signal désiré.
- Hypothèses : $x(n)$ et $y(n)$ sont des processus aléatoires réels, centrés, stationnaires au second ordre et d'intercovariance stationnaire.

Filtre de Wiener : une première approche

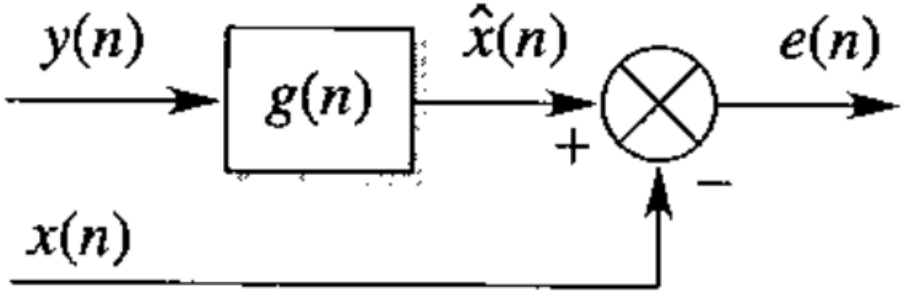


Hypothèse de stationarité

La stationnarité se traduit par :

- $\mathbb{E}\{x(n+k)x(n)\} = \gamma_{xx}(k)$.
- $\mathbb{E}\{y(n+k)y(n)\} = \gamma_{yy}(k)$.
- $\mathbb{E}\{x(n+k)y(n)\} = \gamma_{xy}(k)$.

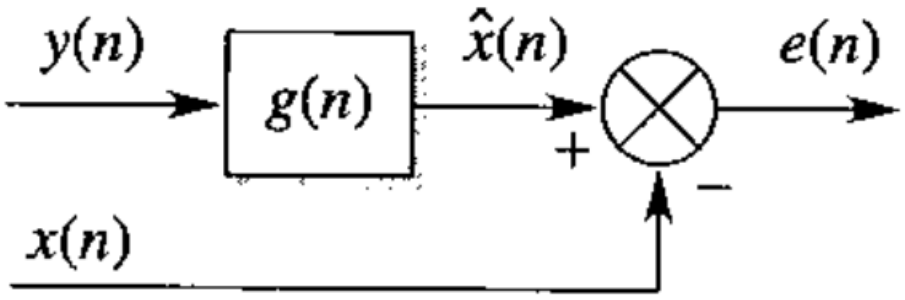
Filtre de Wiener : une première approche



Problème

Déterminer le filtre linéaire défini par $\{g(n)\}$ qui rend minimale la quantité positive $J(\{g(n)\}) = \mathbb{E}\{|x(n) - \hat{x}(n)|^2\}$.
Avec $\hat{x}(n) = \sum_k g(k)y(n-k)$.

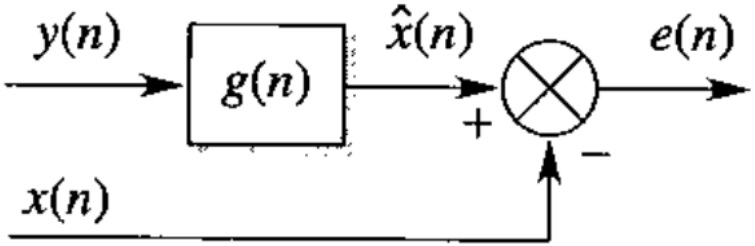
Filtre de Wiener : une première approche



Une solution : théorème de projection...

- H : espace des VA de carré intégrable.
- C : sev engendré par des combinaisons linéaires d'élément de $\{y(n)\}$. Un élément de C s'écrit $\hat{x}(n) = \sum_k g(k)y(n-k)$.

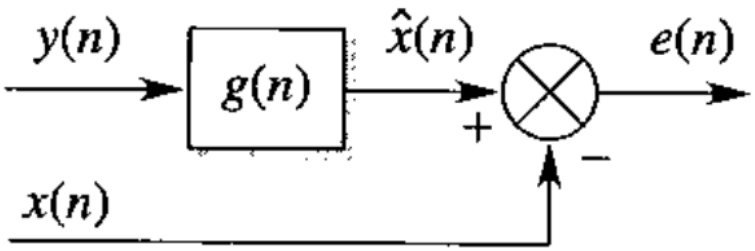
Filtre de Wiener : une première approche



Une solution : théorème de projection...

- Le filtre qui minimise l'écart quadratique entre $x(n)$ et $\hat{x}(n)$ est tel que la différence $x(n) - \hat{x}(n)$ est orthogonale à tout élément de l'espace C.
- Par conséquent $\mathbb{E}\{[x(n) - \hat{x}(n)]y(n-k)\} = 0$.
- D'où $\gamma_{xy}(k) = \sum_m g(m)\gamma_{yy}(k-m)$.
- Cette equation s'appelle *équation de Wiener* et la solution est appelée *filtre de Wiener*.

Filtre de Wiener : une première approche



Supposons qu'il n'y ait pas de contrainte sur C...

- C est l'ensemble des combinaisons linéaires de toutes les variables $y(n)$. On a donc un produit de convolution...
- $\gamma_{xy}(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(m)\gamma_{yy}(k-m) = (g * \gamma_{yy})(k)$.
- On en déduit par TF : $G(\nu) = \frac{\Gamma_{xy}(\nu)}{\Gamma_{yy}(\nu)}$.

Filtre de Wiener : une première approche

En pratique...

En pratique, il est intéressant de considérer les 3 cas suivants (moins simple à résoudre) :

- *Filtrage*. C est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\{y(s); s \leq n\}$ jusqu'à l'instant présent.
  $\hat{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} g(n-k)y(k)$.
- *Prédiction*. C est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\{y(s); s \leq (n-p); p > 0\}$ jusqu'à l'instant passé $(n-p)$.
  $\hat{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-p} g(n-k)y(k)$.
- *Lissage*. C est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\{y(s); s \leq (n+p); p > 0\}$ jusqu'à l'instant futur $(n+p)$.
  $\hat{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+p} g(n-k)y(k)$.